Задача 1

Несомненно, вы видели радугу хотя бы раз в жизни: обычно она представляет собой часть широкой окружности. Замечено, что в Москве, как и в большинстве мест в России центр радуги наблюдается чаще на востоке или юговостоке, тогда как на северо-востоке бывает очень редко. Объясните, почему так происходит? Почему на экваторе в полдень радугу наблюдать нельзя? Что можно сделать, чтобы таки увидеть её в полдень на экваторе?

Решение

Радуга возникает, когда солнечные лучи преломляются в маленьких капельках воды. То есть, в первую очередь необходимо большое количество воды, рассеянной в воздухе в виде небольших капелек. Большая радуга обычно наблюдается после дождя, пока последние капли не осели на землю, а солнечный свет уже пробивается через тучи. Небольшие части радуги можно увидеть около водопадов или фонтанов, рядом с которыми много брызг.

Центр радуги всегда находится в противоположной солнцу точке неба, поэтому радугу хорошо видно утром и вечером, когда солнце невысоко над горизонтом. Отсюда сразу получаем ответ на второй вопрос — в полдень на экваторе центр радуги должен быть у вас под ногами. Для того чтобы увидеть радугу, в этом направлении должно быть большое число капелек воды. Для этого можно подняться на самолёте выше облаков. Другой вариант, стать на краю обрыва, с которого обрушивается водопад.

Теперь ответим на первый вопрос. С марта по сентябрь, когда чаще всего бывают кратковременные дожди, Солнце заходит к северу от точки запада и восходит к северу от точки востока. Поэтому мы видим радугу в восточном и юго-восточном направлении. В то время, когда Солнце заходит к югу от точки запада, а радуга должна быть видна к северо-востоку, обычно идут затяжные осенние дожди, когда небо покрыто сплошной облачностью, а то и вовсе идет снег.

Критерии проверки

- Правильный ответ на первый вопрос **2 балла**
- Объяснение, почему не видно радуги в полдень на экваторе **1 балл**
- Правильный ответ на последний вопрос **1 балла**

Максимальная оценка за задачу **4 балла**

(М. В. Силантьев)

Задача 2

От двух звезд спектрального класса B0V и M3V в видимом диапазоне приходит одинаковое количество энергии. Звезды наблюдаются с фотометром, работающем в режиме счета фотонов, имеющем во всем видимом диапазоне одинаковый квантовый выход, равный 70%. От какой звезды будет зафиксирован больший сигнал? Поглощением света в атмосфере пренебречь.

Решение

Более горячая звезда спектрального класса B излучает в основном в ультрафиолетовом диапазоне спектра. Таким образом, большая часть энергии, которая попадает в оптический диапазон, сосредоточена ближе к его синей границе. Напротив, звезда M почти не излучает в синих лучах, поскольку максимум ее излучения приходится на красную и инфракрасную области спектра.

Энергия кванта света $\varepsilon \sim \nu \sim \lambda^{-1}$. Поскольку полная энергия в видимом диапазоне у обеих звезд одинакова, то от звезды M будет приходить больше фотонов, поскольку в среднем они переносят меньшую энергию. Фотометр с равной эффективностью фиксирует все фотоны, поэтому он покажет больший сигнал от звезды M3V.

Критерии проверки

- Звезда класса B имеет более высокую температуру **1 балл**
- От звезды класса B приходят более «жесткие» фотоны **1 балл**
- Вывод **2 балла**

Правильный ответ без объяснений — **1 балл**..

Максимальная оценка за задачу **4 балла**

(А. М. Татарников)

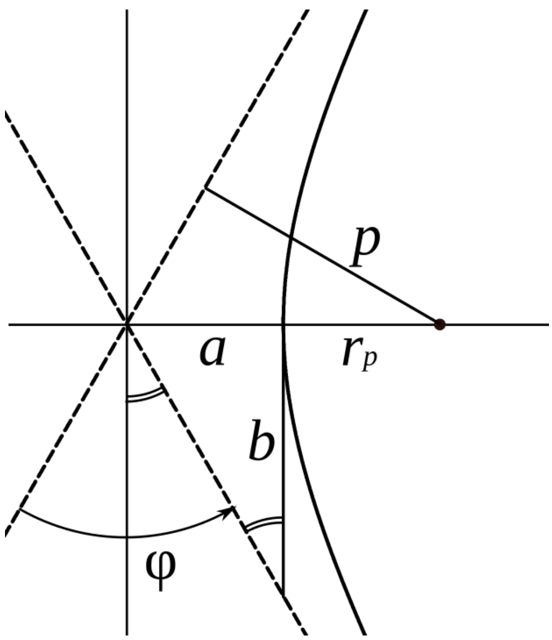
Задача 3

Межзвёздный астероид приближается к звезде так, что если бы не притяжение звезды, он пролетел бы мимо неё на расстоянии 2 а.е. После пролёта астероид отклонился от своего начального пути на 60°. На каком минимальном расстоянии от звезды он пролетел?

Решение

Мимо звезды астероид пролетел по гиперболической орбите. Вдали от звезды движение астероида происходило практически по прямым — асимптотам гиперболы. Уравнение асимптот имеет вид $y = \pm\frac{b}{a}x$, где a и b — большая и малая полуоси орбиты соответственно. Отсюда получаем, что тангенс угла наклона асимптоты к оси абсцисс, содержащей большую ось гиперболы, равен

$$\operatorname{tg}\gamma = \pm\frac{b}{a}$$



Мы знаем, что астероид повернул на угол $\varphi = 60^\circ$ и улетел по другой асимптоте. Значит угол между асимптотой и осью ординат равен 30°, а наклон асимптоты $\gamma = \varphi = 60^\circ$, а следовательно $b = \sqrt{3}a$.

Пусть $p = 2$ а.е. — прицельный параметр, т.е. кратчайшее расстояние от звезды до асимптоты. Опустим из фокуса нормаль на асимптоту. Тогда получаем

$$\frac{p}{c} = \sin\varphi.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат. Тогда

$$\frac{p^2}{c^2} = \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi + 1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}.$$

Поскольку для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2$, то $b = p$.

Отсюда получаем, что большая полуось орбиты равна $a = p/\sqrt{3} \approx 1.15$ а.е. Эксцентриситет орбиты равен

$$e = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2.$$

Наконец, расстояние в перицентре равно

$$r_p = a(e-1) = a \approx 1.15 \text{ а.е.}$$

Критерии проверки

- Вывод соотношения между a и b **2 балла**
- Вывод (может быть известным фактом) $b = p$ **1 балл**
- Формула эксцентриситета гиперболы **2 балла**
- Формула расстояния в периастре **1 балл**
- Численный ответ **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 4

Предположим, что изначально Солнце на 74% состояло из водорода и на 25% из гелия. Светимость Солнца равна 3.83×10^{26} Вт. Считая, что термоядерные реакции идут по всему объему ядра равномерно, а само ядро содержит 34% массы Солнца, определите текущие массовые доли водорода и гелия в ядре. При образовании одного атома ^{4}He выделяется 26.2 МэВ. Возраст Солнца 4.5 млрд. лет.

Решение

Один электронвольт по определению равен энергии, получаемой электроном при прохождении разности потенциалов 1 В. Поскольку элементарный заряд равен 1.6×10^{-19} Кл, то $1\,\text{эВ} = 1.6 \times 10^{-19}$ Дж. Тогда $1\,\text{МэВ} = 1.6 \times 10^{-13}$ Дж, а энерговыделение при образовании одного ядра ^{4}He $\varepsilon = 4.2 \times 10^{-12}$ Дж.

За время жизни Солнца было излучено $E = 3.83 \times 10^{26} \times 4.5 \times 10^9 \times 3.16 \times 10^7 = 5.44 \times 10^{43}$ Дж. Значит за это время образовалось $N = E/\varepsilon = 1.3 \times 10^{55}$ новых ядер гелия.

Начальное число протонов в ядре Солнца $N_{H,0} = 0.74 \times 0.34 \times 2 \times 10^{30}/1.67 \times 10^{-27} = 3.0 \times 10^{56}$, а число ядер гелия $N_{He,0} = 0.25 \times 0.34 \times 2 \times 10^{30}/6.64 \times 10^{-27} = 2.6 \times 10^{55}$. С тех пор число ядер гелия увеличилось на N, а число ядер водорода уменьшилось на $4N$, поскольку при образовании одного ядра гелия расходуется 4 протона. Получаем, что на текущий момент число ядер водорода равно $N_H = N_{H,0} - 4N = 2.48 \times 10^{56}$, а число ядер гелия — $N_{He} = N_{He,0} + N = 3.9 \times 10^{55}$. Теперь получим массовую долю водорода

$$\frac{2.48 \times 10^{56} \times 1.67 \times 10^{-27}}{0.34 \times 2 \times 10^{30}} = 0.61$$

и массовую долю гелия

$$\frac{3.9 \times 10^{55} \times 6.64 \times 10^{-27}}{0.34 \times 2 \times 10^{30}} = 0.38.$$

Итого, в настоящее время в ядре Солнца 61% водорода и 38% гелия.

Критерии проверки

- Определение числа новых ядер гелия **2 балла**
- Определение изначального числа протонов и ядер гелия по **1 баллу**
- Вычисление искомых значений по **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 5

Протоны космических лучей при столкновении с атомами земной атмосферы на высоте $h = 5$ км рождают мюоны (элементарные частицы с временем жизни $\tau = 2 \times 10^{-6}$ с в собственной системе отсчета), которые регистрируются детекторами на поверхности Земли. Пусть все родившиеся мюоны летят вертикально вниз. Определить скорость мюонов, если их концентрация на поверхности Земли в 4 раза меньше, чем в месте их рождения. Поглощение мюонов в атмосфере не учитывать.

Решение

Из-за распада концентрация мюонов уменьшается со временем в соответствии с формулой

$$n = n_0 e^{-t/\tau}.$$

Значит в системе отсчета, связанной с мюонами, с момента их образования и до регистрации прошло время

$$\Delta t' = \tau \ln \frac{n_0}{n} = \tau \ln 4 \approx 1.4\tau = 2.8 \times 10^{-6} \text{ с}.$$

Необходимо, чтобы за это время мюоны добрались до поверхности Земли. Чтобы преодолеть расстояние в 5 км за 2.8 мкс, мюонам нужно обладать скоростью 5×10^3 м$/2.8 \times 10^{-6}$ с $\approx 1.710^9$ м/с, что в 6 раз больше скорости света. Значит для решения задачи надо применять специальную теорию относительности.

Поскольку мюоны движутся быстро, то для них действует лоренцево замедление времени. То есть, для стороннего наблюдателя распад мюонов произошел за время

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

С другой стороны для стороннего наблюдателя $\Delta t = h/v$. Тогда

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{h}{v};$$

$$\Delta t'^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{h^2}{v^2} = \frac{h^2}{v^2} - \frac{h^2}{c^2};$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2 \Delta t'^2}{h^2}}} \approx 0.986c \approx 296000 \text{ км/с}.$$

Критерии проверки

- Формула радиоактивного распада **1 балл**
- Правильное понимание термина «время жизни частицы» (не период полураспада) **1 балл**
- Вычисление времени полета в собственной системе координат **1 балл**
- Формула лоренцева замедления времени **2 балла**
- Вывод формулы для вычисления v **2 балла**
- Вычисление ответа **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 6

Один астроном после покупки бинокля заметил, что многие люди с плохим зрением не могут сфокусировать этот бинокль на бесконечность из-за ограниченного диапазона фокусировки. Чтобы это исправить, он решился на полную переделку узла фокусировки бинокля. Рассчитайте необходимый диапазон хода фокусировки (максимальное расстояние на которое может перемещаться окуляр), чтобы в этот бинокль могли без проблем наблюдать без очков люди как с близорукостью, так и с дальнозоркостью с очками не менее чем ±10 диоптрий. Помните, что бинокль нужен для наблюдения не только бесконечно удаленных объектов! Можно считать что этот бинокль построен по схеме Кеплера из тонких линз. Необходимые для решения задачи данные можно найти в следующей таблице.

Фокусное расстояние объектива бинокля	200 мм
Диаметр объектива бинокля	50 мм
Увеличение бинокля	10x
Минимальная необходимая дистанция фокусировки бинокля	5 м
Стандартное расстояние от глаза до линзы очков	2 см
Минимальная дистанция фокусировки здорового глаза	10 см

Решение

Глаз человека с нормальным зрением в расслабленном состоянии сфокусирован на бесконечность. При необходимости он может быт сфокусирован на более близкие объекты, находящиеся на расстоянии вплоть до 10 см (по условию). Это дальняя и ближняя границы ясного зрения. У близорукого человека обе эти границы находятся ближе к наблюдателю, а у дальнозоркого — дальше. То есть глаз дальнозоркого человека в расслабленном состоянии строит изображение бесконечно далеких объектов за сетчаткой, но может быть сфокусирован на бесконечность. По мере усиления дальнозоркости ближняя граница ясного зрения удаляется от наблюдателя и в какой-то момент глаз теряет возможность строить изображение далеких объектов. Проверим, не происходит ли такого в условиях задачи.

Нужно узнать, существуют ли точки, расположенные на расстоянии от 10 см до бесконечности от глаза, изображение которых в линзе очков дает глазу параллельный пучок. Если да, то наш дальнозоркий глаз сможет его сфокусировать. Фокусное расстояние линзы на +10 дптр – 10 см. А значит фокус её находится в 12 см от глаза. Изображение точки, находящейся в фокусе линзы как раз даст нам нужный параллельный пучок, и наш подопытный глаз сможет его сфокусировать. Несложно показать, что в случае чисел из задачи необходима дальнозоркость в 12.5 дптр, что бы не видеть на бесконечности. Понятно, что реальная ситуация может сильно зависеть от механизма возникновения дальнозоркости, и для участников выполнение этой проверки не обязательно для получения полного балла.

Таким образом, мы показали, что дальнозоркий человек может пользоваться биноклем без дополнительной доработки.

При фокусировке бинокля на бесконечность человеком с нормальным зрением фокус окуляра и фокус объектива совпадают, а каждому параллельному пучку света, попадающему в объектив, соответствует также параллельный пучок света, выходящий из окуляра. В случае близорукости из окуляра телескопа должен выходить расходящийся пучок, как будто астроном видит близкий к нему объект. Рассчитаем максимальное расстояние, на котором наблюдатель с близорукостью видит объекты четко. Воспользуемся тем, что очки должны строить изображение бесконечно удаленных объектов именно на таком расстоянии от глаза. Фокусное расстояние линзы −10 дптр составляет 10 см, а значит, искомое изображение должно быть на расстоянии 12 см от глаза.

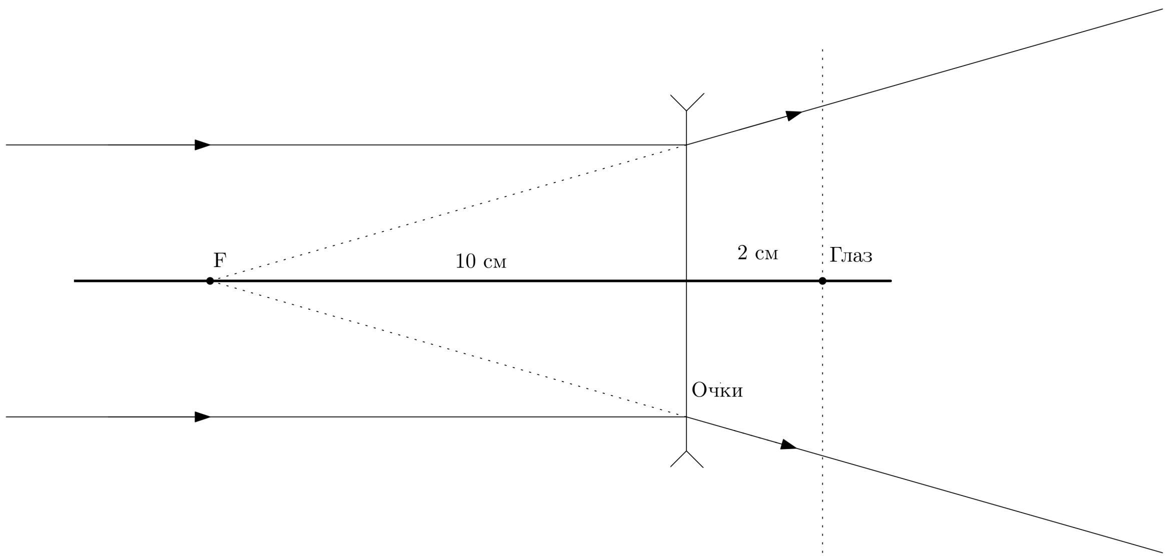


Рис. 1: *Близорукий глаз в очках*

Теперь посчитаем насколько нужно сместить окуляр, что бы получить изображение фокальной плоскости в нужном месте. Для точного расчёта необходимо одновременно варьировать расстояние от линзы до глаза, учитывая, что глаз расположен ровно в выходном зрачке. Нарисуем схему происходящего.

Здесь $F = 200$ мм — фокусное расстояние объектива бинокля, $f = F/\Gamma = 20$ мм — фокусное расстояние его окуляра, Г — увеличение, x — необходимое

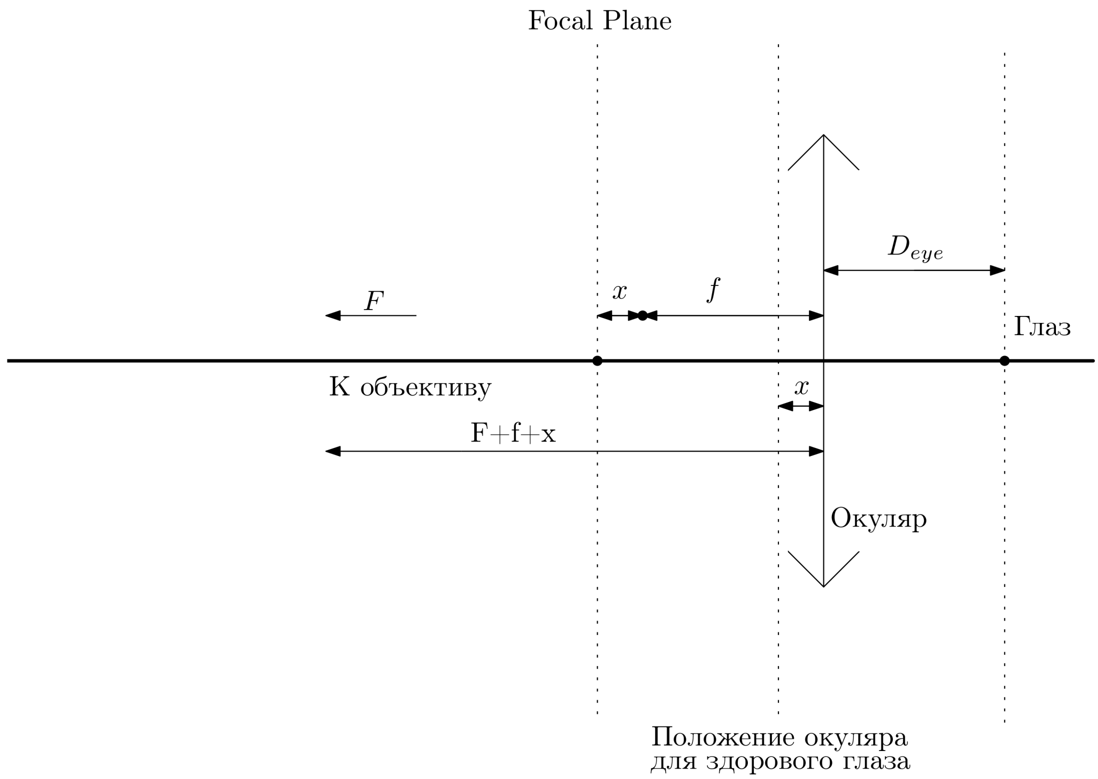


Рис. 2: *Близорукий глаз смотрит в телескоп*

смещение окуляра. Для определенности будем считать, что x положительно при приближении окуляра к глазу.

Далее применяем формулу тонкой линзы для собирающей линзы:

$$\frac{1}{F_{lens}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a и b — расстояния от линзы до объекта и изображения. Сначала найдём расстояние от глаза до окуляра. Он должен быть в выходном зрачке, а это плоскость в которой находится построенное окуляром изображение объектива. Расстояние от объектива до окуляра в нашем случае $F + f + x$, а значит искомое расстояние глаз – окуляр:

$$D_{eye} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{F+f+x}}$$

Объектив в своей фокальной плоскости строит изображение, которое наблюдатель рассматривает в окуляр. То есть, окуляр строит изображение изображения, которое располагается на расстоянии D_{img} от окуляра:

$$D_{img} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{f+x}}.$$

Тут необходимо понять, с какой стороны от линзы должно быть расположено это изображение и знак выражения полученного выше. Изображение должно находиться на расстоянии 12 см от глаза, то есть между объективом и окуляром, а значит, с той же стороны от линзы, что и источник этого изображения — фокальная плоскость. Это значит, что $D_{img} < 0$. Иными словами, собирающая линза окуляра выдаст необходимый глазу расходящийся пучок, если объект находится ближе её фокусного расстояния, то есть $x < 0$, откуда следует, что $D_{img} < 0$.

Получаем уравнение для нахождения x:

$$D_{eye} - D_{img} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{F+f+x}} - \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{f+x}} = 120 \text{ мм}$$

$$\frac{-Ff^2}{Fx + x^2} = 120 \text{ мм}$$

$$x = -3.39 \text{ мм}$$

Второй корень, примерно -24 метра, не очень физичен и нас не интересует. Сильно упростить эту часть решения можно пренебрегая $\frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{F+f+x}} \approx f$. То есть утверждая что глаз всегда находится от окуляра на расстоянии равным его фокусному расстоянию. Это достаточно хорошее приближение, и при наличии должного обоснования оно оценивается полным баллом. В этом случае $x = -3.33$ мм. Таким образом в случае фокусировки на бесконечность для близорукого глаза надо приблизить окуляр к объективу на 3.4 мм.

Далее посмотрим, что нужно для наблюдения здоровым глазом в бинокль объектов, расположенных на расстоянии 5 метров. Рассчитаем расстояние от линзы объектива до новой плоскости изображения, которая теперь будет вместо фокальной плоскости:

$$D_{img5} = \frac{1}{\frac{1}{F} - \frac{1}{5 \text{ м}}} = 208.33 \text{ мм}.$$

То есть нужно отодвинуть окуляр на 8.33 мм от объектива для получения чёткого изображения.

Для близорукого глаза по аналогии с предыдущим придется обратно двигать окуляр к объективу на величину порядка 3–4 мм, что не влияет на искомый диапазон фокусировки. Дальнозоркий глаз снова может наблюдать параллельный пучок.

Получаем что необходимый диапазон фокусировки составляет $3.39 + 8.33 = 11.72$ мм. Конечно здесь не учтены влияния температуры на изменения параметров оптической схемы, поэтому надеемся что вы посоветуете астроному сделать запас под неточность юстировки и температурные деформации. В любом случае необходимый диапазон фокусировки не может быть меньше полученного числа.

Критерии проверки

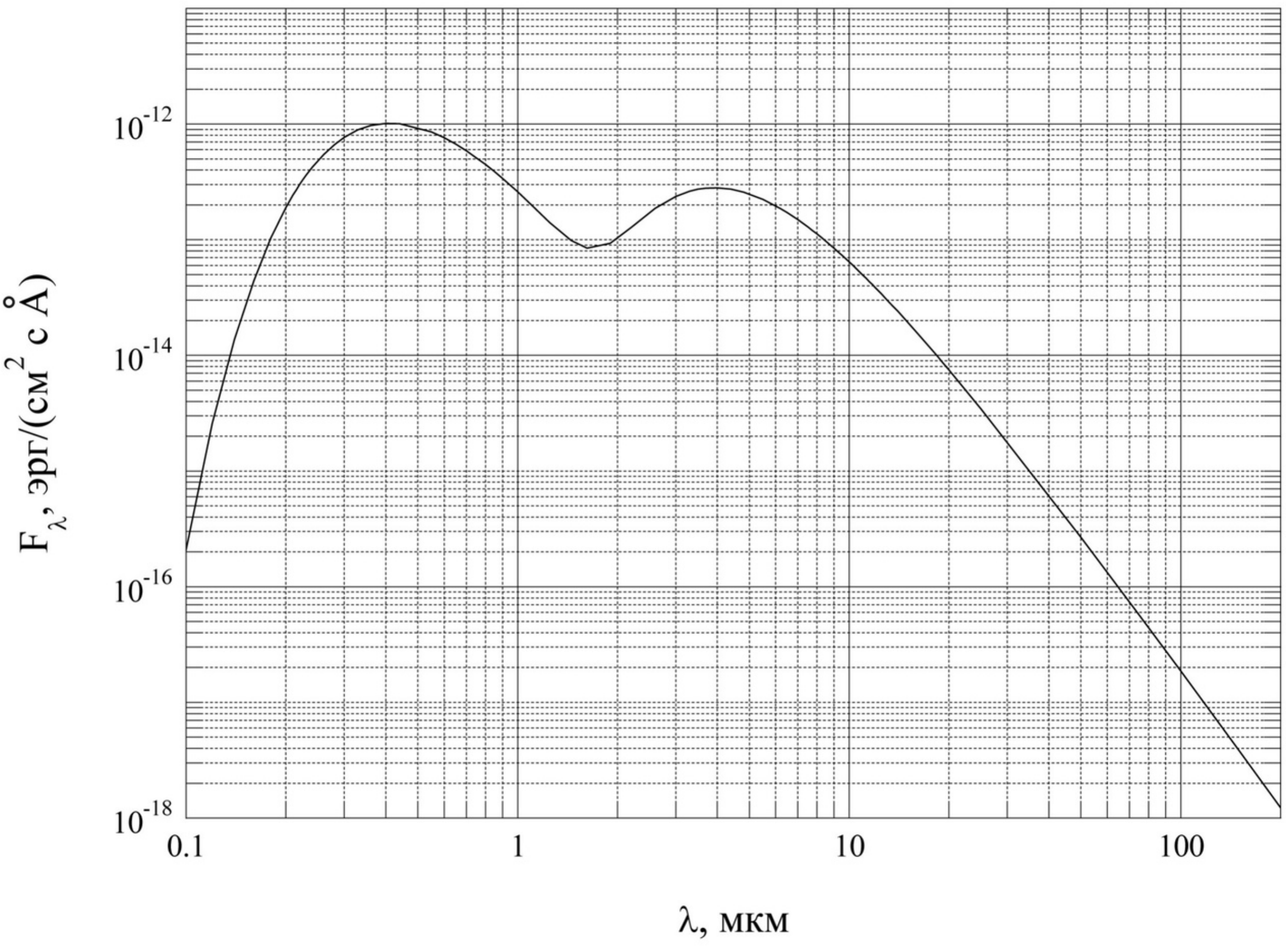
- Вывод о том, что фокусировку для дальнозоркого глаза менять не надо (с проверкой или без) **2 балла**
- Расчёт необходимого расстояния от близорукого глаза до наиболее далёкого от него точечного объекта **1 балл**
- Расчёт расстояния от окуляра до глаза **1 балл**
- Расчёт смещения окуляра для близорукого глаза **1 балл**
- Расчёт смещения окуляра для здорового глаза при наблюдении близких объектов **2 балла**
- Правильный конечный ответ **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**

(С. Г. Желтоухов)

Задача 7

На графике представлено распределение энергии в спектре одной из звезд, окружённой пылевой оболочкой. Известно, что оболочка состоит из черно-тельных пылинок, она сферически симметричная и геометрически тонкая (т. е. её толщиной можно пренебречь по сравнению с радиусом). Параллакс звезды 0.002″. Определите радиус центральной звезды, если известно, что её эффективная температура 7000 К. Чему равна температура пылинок и оптическая толща пылевой оболочки в видимом диапазоне длин волн?
1 эрг = 10^{-7} Дж. 1 Å = 10^{-10} м.



Решение

Для того, чтобы вычислить радиус звезды при известной температуре, надо найти её светимость. Пылевая оболочка вокруг звезды сферически симметричная, значит все направления для системы звезда+оболочка равноправны, и мы можем определить светимость по болометрическому потоку и известному расстоянию — пылинки светят не сами по себе, а переизлучая поглощённую энергию звезды, поэтому сумма излучения пыли и той части энергии звезды, что прошла без поглощения, будет болометрическим потоком энергии центрального источника.

Болометрический поток определим по графику, измерив площадь под кривой распределения энергии. При этом надо обратить внимание на единицы измерения длины волны и освещённости, а так же на то, что график построен в логарифмических осях. У нас получится величина $F = 2.4{\times}10^{-8}$ эрг $\cdot$ см$^{-2}$ $\cdot$ с$^{-1}$ (если забыть перевести мкм в ангстремы, то получится 2.4×10^{-12}).

Примечание: можно предложить и другой способ вычисления для тех, кто помнит выражение для функции Планка — т.к. оболочка тонкая (все пылинки имеют одну температуру, т.к. находятся на одном расстоянии от звезды) и состоит из чернотельных частиц, мы можем считать, что её излучение можно описать излучением абсолютно черного тела. Определив температуру пылинок (см. ниже), можно вычислить из функции Планка поток от единичной площадки АЧТ в максимуме, найти нормировочную постоянную такую, чтобы это значение совпало с измеренным по графику (примерно 3×10^{-13} эрг $\cdot$ см$^{-2}$ $\cdot$ с$^{-1} \cdot \mathring{A}^{-1}$) и использовать её при вычислении болометрического потока $F = const \cdot \sigma T^4$.

Зная параллакс, найдём расстояние до звезды $D = \pi^{-1} = 500$ пк и вычислим её светимость

$$L = 4\pi D^2 F = 4\pi(500 \times 3.08 \times 10^{18})^2 \times 2.4 \times 10^{-8} \approx 7.2 \times 10^{35} \text{ эрг/с}$$

или около $190\,L_\odot$ ($L_\odot$ — светимость Солнца).

Используя связь светимости, температуры и радиуса, найдём радиус звезды:

$$R = \left(\frac{L}{1}\right)^{0.5} \left(\frac{5800}{T}\right)^2 \approx 9.5 R_\odot.$$

Если для Солнца взять температуру 6000 K, то получится 10, а если взять чуть ранее еще и светимость Солнца 4×10^{33} эрг/с, то получится примерно 9.8 — подобные значения засчитываются как верные. У тех, кто забыл перевести мкм в ангстремы должно получиться значение в 100 раз меньше — примерно 0.1.

Определим температуру пылинок в оболочке. Мы видим, что вклад излучения звезды в излучение оболочки в области максимума очень мал — пренебрежём им. Тогда максимум приходится на длину волны 4 мкм, а значит, температура в соответствии с законом смещения Вина будет равна

$$T = \frac{2900}{4} = 725\,\text{K}.$$

Оптическую толщу оболочки можно оценить через отношение болометрического потока энергии от всей системы к той части потока от центральной звезды, что прошла через оболочку не испытав поглощения: $\tau = \ln\frac{F}{F_\star}$. Напрямую измерить величину $F_\star$ затруднительно, т.к. в ИК-диапазоне превалирует излучение оболочки. Поэтому сделаем наоборот, измерим поток от пылевой оболочки в диапазоне 2-200 мкм (пренебрежём частью излучения, приходящейся на коротковолновый диапазон, т.к. там для температуры 725 K находится виновская область излучения АЧТ и наблюдается резкое падение потока) и вычтем его из полного потока F. Получится, что $F_{\text{оболочки}} = 1.7 \times 10^{-8}$ эрг/см^2/с (1.7×10^{-12} эрг/см^2/с у тех, кто не перевел мкм в ангстремы). Отсюда $F_\star = 0.7 \times 10^{-8}$ эрг/см^2/с.

$$\tau = \ln\frac{F}{F_{\text{star}}} = \ln\frac{2.4\times10^{-8}}{0.7\times10^{-8}} \approx 1.2$$

Найденная нами величина оптической толщи оболочки относится к тому диапазону длин волн, на который приходится максимум излучения центральной звезды, который, как видно из графика, попадает на 400 нм. Значит мы нашли величину τ для видимого диапазона, что и требовалось в условии.

Критерии проверки

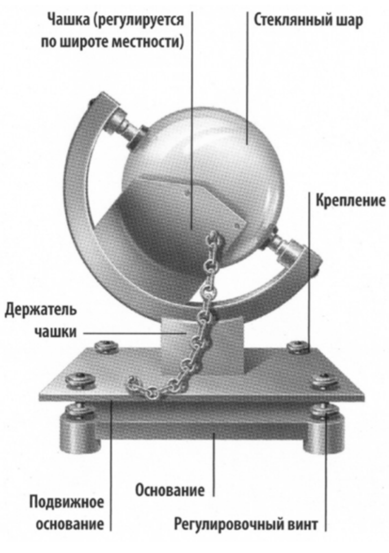
- Использование (вычисление) верного расстояния в 500 пк **1 балл**
- Верное по способу определение болометрического потока **3 балла**
  (если забыли перевести мкм в ангстремы, то штраф **2 балла**, который применяется только 1 раз)
- Вычисление (или использование в дальнейшем) светимости **1 балл**
- Вычисление радиуса звезды с верным ответом **2 балла**
  (абсурдное значение радиуса — штраф **2 балла**)
- Определение температуры пылинок (в диапазоне 650–800 K) **2 балла**
- Верное по способу вычисление оптической толщи **3 балла**
  (при прямом использовании потока от звезды без учёта вклада излучения оболочки — штраф до **3 баллов**, в зависимости от метода; при простом суммировании потока в диапазоне 0.1–2 мкм без обсуждения вносимой погрешности с ответом $F_{star} = 6\times10^{-9}$ — штраф **1 балл**).

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**

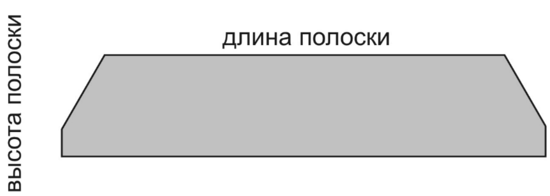
(А. М. Татарников)

Задача 8

Гелиограф — один из метеорологических приборов. Он предназначен для регистрации количества времени в сутках, которое Солнце не закрыто облаками. Конструкция гелиографа приведена на рисунке и фотографии. На особой неподвижной монтировке, ось которой направлена на полюс Мира, закреплен стеклянный шар. На вогнутом экране (его называют «чашка») за шаром располагается тёмная полоска бумаги (её размеры в нашем конкретном случае всегда одинаковые). Солнечное излучение, пройдя через шар, попадает на эту полоску и прожигает её. По длине прожженной части определяется время, которое в этот день прямой солнечный свет доходил до прибора.
а) Зная, что расстояние от центра шара до экрана равно 200 мм и считая, что прибор устанавливается на местности на много лет, определите минимальную высоту полосок бумаги, которые надо заготовить для приборов, установленных на широте 55° и на широте 30°. Искривлением прожжённых суточных следов на бумаге пренебречь.
б) Как видно из схемы и фото прибора, «чашка» и полоска имеет форму, близкую к трапеции с зауженной верхней частью. Объясните, чем это может быть вызвано?

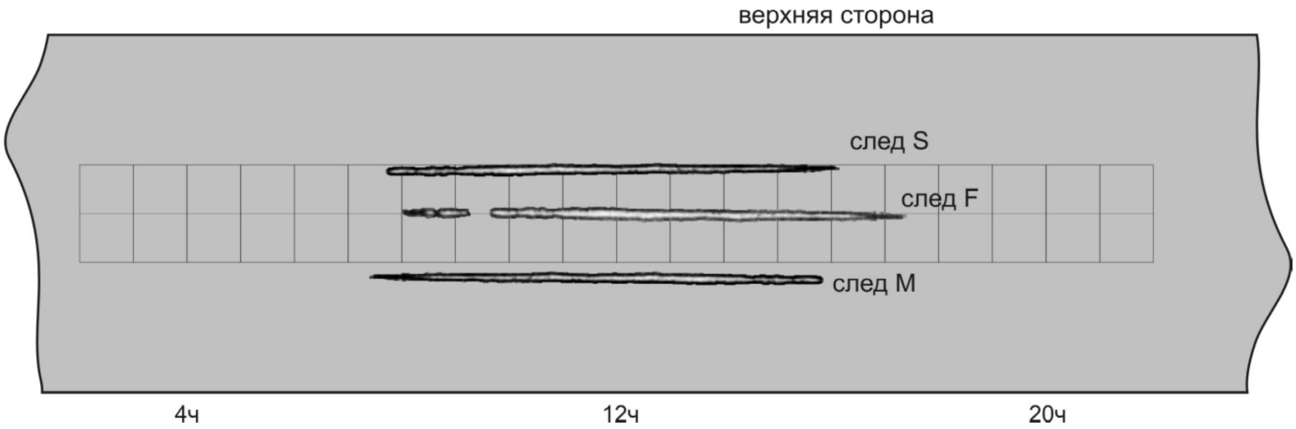


Примечание: конкретный вид прибора не играет роли при решения задачи.



Полоска бумаги

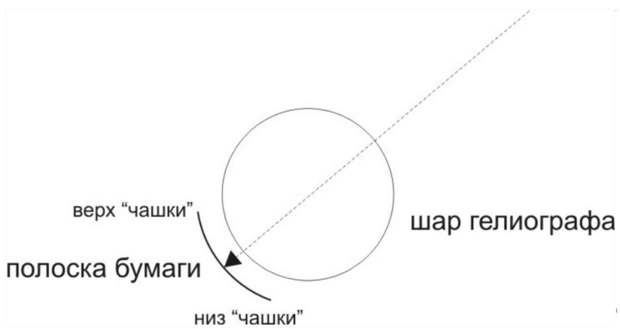
На рисунке представлен оборванный по краям фрагмент записи с описанного выше гелиографа. Из экономии одну и ту же бумажную полосу использовали три раза в течение 2015 года. При этом известно, что первым был зарегистрирован «след M».



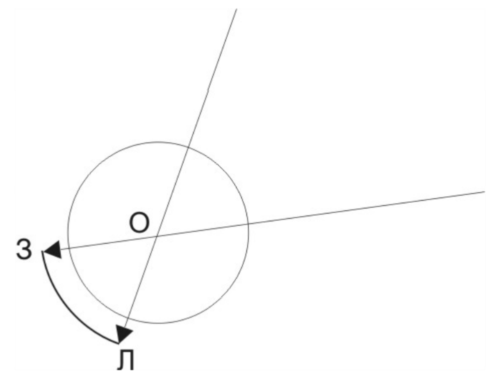
1. В какой последовательности были зарегистрированы следы S, F, M?
2. Определите, сколько процентов дневного времени было ясно в дату, когда был получен «след F».
3. Сколько времени прошло между датами, в которые были получены «след M» и «след S»?

Решение

Чтобы понять, как на полоске бумаги появляется отметка о положении Солнца, нарисуем в проекции на небесный меридиан схему хода луча Солнца, находящегося в верхней кульминации:



Луч Солнца, идущий через центр шара, не изменит своего направления, а для остальных лучей шар будет работать аналогично положительной линзе, собирая свет в пятно на бумаге. В ходе суточного движения пятно будет перемещаться по полоске бумаге, прожигая линию той или иной степени прерывистости (в зависимости от наличия/отсутствия облаков). Чем выше Солнце находится на небе в полдень, тем ниже на полоске будет суточный след. Этим и определяется минимальная высота полоски бумаги, необходимая для того, чтобы на неё мог попасть суточный след в крайних положениях Солнца по высоте над горизонтом: в дни зимнего и летнего солнцестояний. Эти два положения на небе разделяет угол примерно в $23.5 \times 2 = 47°$.



Крайние положения показаны на рисунке. Высоту h полоски ЗЛ можно найти разными способами, например, через соотношение длины окружности и длины дуги:

$$h = \frac{47}{360} 2\pi R = 164 \text{ мм}.$$

Как мы видим, высота полоски не зависит от широты места наблюдения (до тех пор пока Солнце в полдень кульминирует над горизонтом, что выполняется и для 55°, и для 30°).

Длина части суточного пути Солнца, находящейся над горизонтом, зависит от сезона. Зимой она короче, летом длиннее. Поэтому полоску бумаги можно вырезать соответствующим образом. Экономии бумаги при этом не происходит, т.к. обрезки идут в мусор. Поэтому основная причина в другом — бесполезная часть полоски будет отбрасывать тень в летние дни, когда Солнце восходит (и заходит) в точках горизонта, находящихся севернее точек запада и востока.

Практическая часть

Как видно из схемы расположения следов, «след F» приходится ровно на центр полоски — значит, он был получен во время равноденствия (напомним, что по условия ширина полоски имеет минимально возможное значение, достаточное лишь для того, чтобы при условии прямолинейности следов на ней зафиксировать положение Солнца в течение года — в этом случае по центру полоски проходит как раз солнечный след в дни равноденствий). Прожжённые следы, находящиеся ниже центра, зарегистрированы в те дни, когда Солнце было выше экватора, а те, что находятся выше центра — когда Солнце было ниже экватора. Т.к. начало записей приходится на летний период («след M»), то последовательность будет такой: M, F, S. При этом «след F» — след, оставленный в день осеннего равноденствия.

Прожжённая часть «следа F» занимает ровно 9 часов. День длился 12 ч (равноденствие), значит ясного времени днем было:

$$\frac{9}{12}100\% = 75\%.$$

Высота бумажной полоски соответствует 47° на небе. Нетрудно определить расстояние от «следа M» до «следа S» и выразить его в градусах. Это есть разность в высотах Солнца в полдень. В задаче все происходит относительно близко по времени к дню равноденствия. Возможно 2 случая:

– «след M» был записан вскоре после дня весеннего равноденствия или
– он был записан незадолго до дня осеннего равноденствия.

Поэтому у нас будет 2 ответа.
«След M» отстоит от центра полоски на 8.5°. Недалеко от равноденствий можно считать, что склонение Солнца меняется примерно с постоянной скоростью $\frac{360}{365}\sin 23.4 \approx 0.39°$/сут (с постепенным уменьшением). Это значит, что «след M» был зафиксирован примерно за 22 дня до или примерно через 22 после равноденствия (осеннего или весеннего, соответственно).

«След S» отстоит от центра полоски на 6° (выше). Это значит, что «след S» был зафиксирован примерно через $6/0.39 \approx 15$ дней после осеннего равноденствия.

В первом случае между наблюдениями «M» и «S» прошло примерно 37 дней, во втором случае — примерно 176 дней.

Критерии проверки

- Рассмотрение влияния сезонного изменения высоты Солнца **1 балл**
- Вычисление высоты полоски с верным ответом **2 балла**
  (с ответом в 2 раза меньшим — **1 балл**)
- Вывод, что высота полоски не зависит от широты **1 балл**
- Полное верное (через длину суточного пути и экранирование) объяснение почему полоску (чашку) обрезают до **2 баллов**
  (если без длины суточного пути или без экранирования — до **1 балла**)
- Верная последовательность регистрации следов с корректным объяснением **2 балла**
- Верное вычисление процента ясного неба **2 балла**
- Верное вычисление промежутка времени для каждого из случаев по **1 баллу**.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**

(А. М. Татарников)