LXXIX Московская астрономическая олимпиада (2025 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

10 класс

Задача 1

Хорошо известно, что разрешающая способность телескопа тем лучше, чем меньше длина волны наблюдения. Почему же тогда разрешение изображений, полученных космическими телескопами в жёстком рентгеновском и гамма-диапазонах, существенно хуже оптических?

Решение. Очевидно, что условие отсылает к известной формуле разрешающей способности:

$$\rho \propto \frac{\lambda}{D},$$

где D — диаметр объектива телескопа, λ — длина волны наблюдения, ρ — минимальное угловое расстояние, на котором два точечных объекта видны по отдельности.

Из вида формулы напрашивается ответ, что космические рентгеновские и гамма-телескопы просто очень маленькие, потому и их разрешение невелико. Такое рассуждение неверно. Гамма-излучение характеризуется длинами волн порядка сотых долей нанометра и короче, что на пять порядков меньше оптических длин волн. Казалось бы, такое же разрешение, как у гигантских наземных телескопов с апертурой $\sim$ 10 м, должно быть у крошечных гамма-телескопов размером ~ 0.1 мм. А что мешает запустить в космос гамма-телескоп размером около метра?

Но более важно другое. При прохождении апертуры телескопа свет демонстрирует явление дифракции. Как следствие, даже точечный источник света отображается в фокальной плоскости в виде сложной структуры дифракционных колец. Формула описывает минимальное расстояние между этими изображениями, когда они остаются различимы. Фотоны высоких энергий пронизывают зеркала из любых доступных материалов навылет, поэтому для их регистрации используют методы, применяемые в физике элементарных частиц. Определение направления прихода гамма-фотонов здесь выполняется совершенно иными методами, а рассматриваемая формула просто неприменима.

Критерии проверки

1. Правильный ответ **4 балла**

   Правильный ответ должен содержать обоснованное утверждение: конструкция гамма-телескопов принципиально иная, следовательно, формула неприменима. В иных случаях оценка не может превышать **2 баллов**. Жюри может ставить отдельные баллы за некоторые полезные указания в решении, в том числе

   Формула разрешающей способности — **1 балл**

   Жесткое излучение не отражается зеркалами — **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

На Южном полюсе Земли во льду на глубине 1450–2450 м расположены детекторы нейтринной обсерватории IceCube. На рисунке ниже показана карта в экваториальных координатах, на которой отмечены места прихода астрофизических нейтрино высоких энергий, т. е. таких нейтрино, чьи источники находятся за пределами нашей Галактики. Наблюдения велись 9 лет. Почему отметки не заполняют карту равномерно, а группируются вдоль одной полосы?

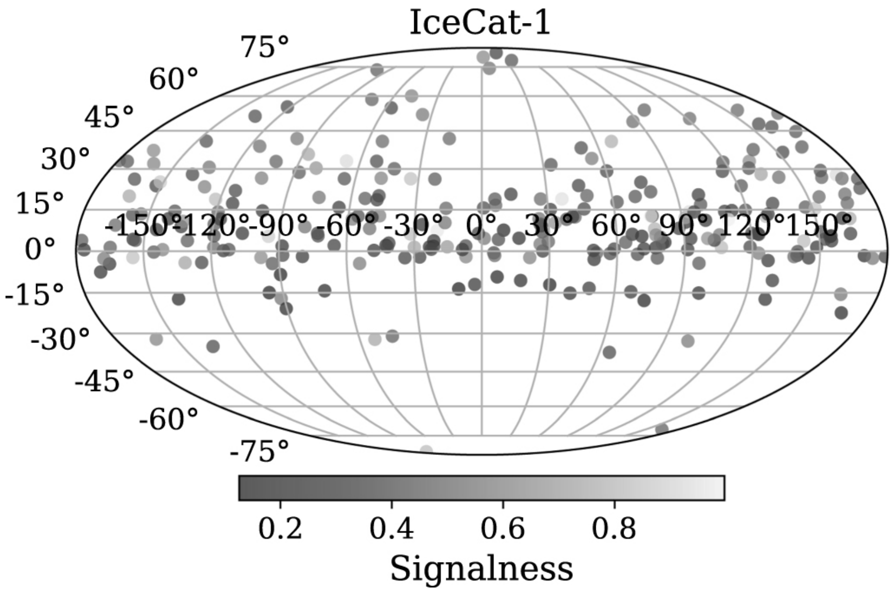
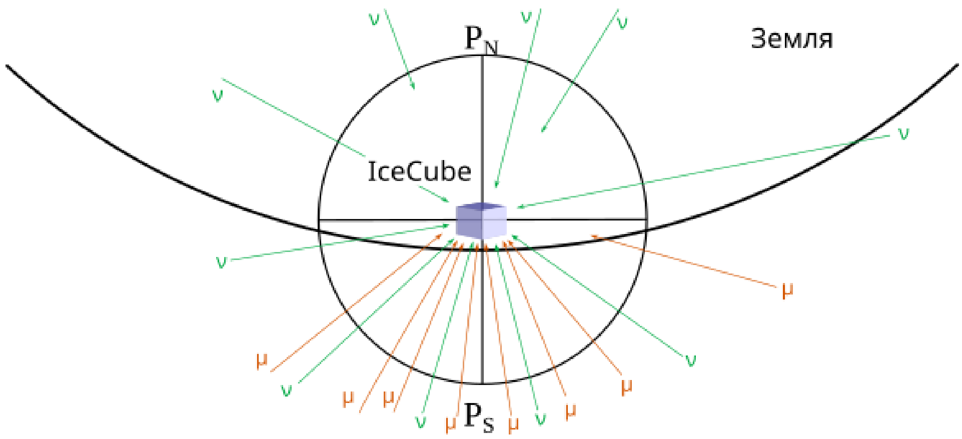


Рисунок из R. Abbasi *et al* 2023 *ApJ* 954 75.

Решение. Положение оси экваториальной системы координат и всех связанных с ней кругов задается направлением оси вращения Земли. Сложно ожидать, что расположение источников излучения, находящихся за пределами нашей Галактики, тоже тоже связано ориентацией земной оси. Поэтому стоит обратиться к условиям наблюдений.



Обратим внимание, что регистрация нейтрино таких высоких энергий — это довольно редкое событие: несколько штук в месяц. Детекторы расположены на большой глубине, до которой почти не добираются частицы космических лучей. Небольшая часть прошедших космических лучей, преимущественно мюоны, всё же детектируется телескопом, причем число событий, вызванных космическими лучами, превосходит число событий, связанных с нейтрино, отчего последние сложно выделить в сильном шуме. Только при наблюдении на высотах от примерно $-20°$ толща льда становится достаточной, чтобы эффективно экранировать космические лучи.

Нейтрино, идущие со стороны Северного полюса, проходят через всю толщу Земли. Хоть нейтрино слабовзаимодействующие частицы, они всё же взаимодействуют с веществом Земли, отчего их поток уменьшается.

Это несколько контринтуитивный вывод, поскольку нейтрино обладают огромной длиной свободного пробега. Тем не менее с ростом энергии длина свободного пробега нейтрино уменьшается и для самых энергичных из них Земля перестаёт быть полностью прозрачной. Для нейтрино менее высоких энергий область высоких склонений на подобной карте не выделяется.

Критерии проверки

1. Поглощение нейтрино Землёй в северном направлении **2 балла**
2. Сильно зашумлённый сигнал в южном направлении **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 3

Предположим, что наше Солнце вдруг распалось на две одинаковые звезды, которые достаточно быстро вернулись на главную последовательность. На сколько градусов изменится эффективная температура Земли после этого?

Считайте, что альбедо Земли останется прежним. Звёзды расположены близко друг к другу на месте Солнца, но не деформированы. Перетекания вещества нет. Парниковый эффект не учитывать.

Решение. Земля нагревается излучением Солнца. Если L_0 — светимость Солнца, a_0 — радиус орбиты Земли, R — радиус Земли и A — альбедо Земли, то в единицу времени Земля поглощает от Солнца энергию в количестве

$$J = \frac{L_0}{4\pi a_0^2}(1-A)\pi R^2.$$

Если температура Земли постоянна, то вся эта энергия излучается Землей: $J = 4\pi R^2 \sigma T_0^4$. Здесь σ — постоянная Стефана — Больцмана, T_0 — текущая температура Земли. Приравнивая правые части этих двух уравнений, получим

$$\frac{L_0}{4\pi a_0^2}(1-A)\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T_0^4 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \sqrt[4]{\frac{L_0}{16\pi\sigma a_0^2}(1-A)} \propto \sqrt[4]{L_0}.$$

Для звёзд главной последовательности с массами от $0.5M_\odot$ до $2M_\odot$ ($M_\odot$ — масса Солнца) справедлива зависимость масса — светимость в виде $L \propto M^4$. Тогда светимость звезды с массой $M_\odot/2$ равна

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{M_\odot/2}{M_\odot}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

По условию задачи Землю будут освещать две таких звезды. Тогда отношение новой и старой температур будет равно

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt[4]{2 \cdot \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \approx 0.6 = k.$$

Изменение температуры составит

$$\Delta T = T_0 - T = T_0 - kT_0 = T_0(1-k) \approx 0.4T_0.$$

Величину T_0 можно вычислить по формуле, полученной ранее: $T_0 \approx 254$ К. Тогда изменение температуры составит $\Delta T \approx 100$ К.

Критерии проверки

1. Вывод или запись формулы для равновесной температуры	**2 балла**
2. Запись зависимости $L(M)$	**1 балл**
3. Отношение температур	**2 балла**
4. Текущая температура	**1 балл**
5. Окончательный ответ: формула + значение	**2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(С. Г. Желтоухов)

Задача 4

В англоязычной литературе, посвящённой исследованиям фона неба, иногда в качестве единиц измерения поверхностной яркости используются единицы $S_{10}(\mathrm{V})$, где V означает спектральный диапазон, в данном случае — визуальный. Одна $S_{10}(\mathrm{V})$ соответствует поверхностной яркости в видимом диапазоне, создаваемой потоком от одной звезды спектрального типа G2V 10-й звёздной величины в полосе V, «размазанным» по площади в один квадратный градус. Две единицы $S_{10}(\mathrm{V})$ соответствуют яркости, создаваемой двумя звёздами и т. д.

В Крымской обсерватории среднее значение фона неба в видимом диапазоне оказалось равно 20 звёздным величинам с квадратной секунды.

1. Чему равно среднее значение яркости фона неба в видимом диапазоне в Крымской обсерватории в единицах $S_{10}(\mathrm{V})$?
2. Галактика M31 (Туманность Андромеды) имеет размеры $3^\circ \times 1^\circ$ и видимую звёздную величину $+3.44^m$. Оцените поверхностную яркость галактики в величинах $S_{10}(\mathrm{V})$. Считайте, что форма M31 при наблюдении с Земли близка к эллипсу.

Решение. Переведем яркость фона неба в Крымской обсерватории из звёздных величин на квадратную секунду в звёздные величины на квадратный градус. Для этого воспользуемся формулой Погсона. Так как площадь квадратного градуса в $3600 \times 3600 = 12\,960\,000$ раз больше, чем площадь квадратной секунды, то во столько же раз больше приходит от него света:

$$m_{\text{градус}} - 20^m = -2.5 \lg(129\,600\,000) \quad \Rightarrow \quad m_{\text{градус}} = 2.22^m.$$

Теперь опять же с помощью формулы Погсона посчитаем, сколько звёзд 10^m нужно, чтобы получить поток как от звезды 2.22^m. Пусть E_{10} — освещённость, создаваемая звездой 10^m, а $E_{2.22}$ — освещённость, создаваемая звездой 2.22^m. Тогда

$$\frac{E_{2.22}}{E_{10}} = \frac{NE_{10}}{E_{10}} = N = 10^{-0.4(2.22-10)} = 1294.$$

Получается, что фон неба эквивалентен $1294 S_{10}(\mathrm{V})$.

Площадь M31 в квадратных градусах равна

$$S = \pi ab = \pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 2.356^{\square}.$$

С помощью формулы Погсона перейдём к поверхностной яркости M31 в звёздных величинах с квадратного градуса

$$m_{\text{A, градус}} - 3.44^m = -2.5 \lg\left(\frac{1}{S}\right) \quad \Rightarrow \quad m_{\text{A, градус}} = 3.44 + 2.5 \lg 2.356 \approx 4.37^m.$$

Переведём её в $S_{10}(\mathrm{V})$ так же, как мы делали это выше:

$$N = 10^{-0.4(4.37-10)} \approx 179.$$

Получаем, что яркость Туманности Андромеды равна $179 S_{10}(\mathrm{V})$.

Критерии проверки

1. Ответ на первый вопрос: формула + значение **2 + 2 балла**
2. Вычисление площади на небе, занимаемой Туманностью Андромеды **1 балл**
3. Ответ на второй вопрос: формула + значение **1 + 2 балла**

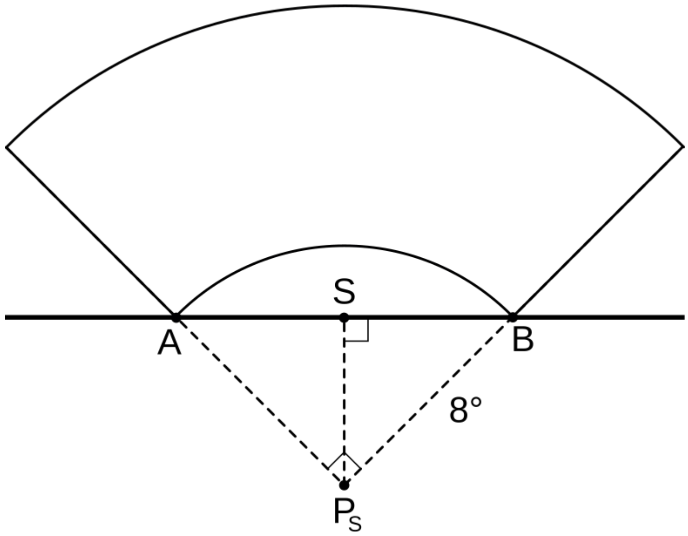
Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. А. Татарников)

Задача 5

Созвездие Хамелеона занимает на небе «прямоугольную» область от $-75°$ до $-82°$ по склонению и от $7^{\mathrm{h}}\,40^{\mathrm{m}}$ до $13^{\mathrm{h}}\,40^{\mathrm{m}}$ по прямому восхождению. На каких широтах можно увидеть это созвездие на небе полностью в один момент времени?

Решение. Для того чтобы созвездие было видно, необходимо, чтобы восходили над горизонтом самые южные его части. Южная граница созвездия отстоит от Южного полюса мира на 8°, а значит, будет кульминировать в точке юга на 8° с. ш. Это условие необходимое, но отнюдь не достаточное. Созвездие Хамелеона простирается по прямому восхождению на 6 часов, откуда следует, что когда одна из точек на его южной границе находится в верхней кульминации на горизонте, остальные находятся под горизонтом.



Рассмотрим ситуацию, когда восточный (A) и западный (B) «южные углы» созвездия одновременно находятся на горизонте. Расстояние этих точек от Южного полюса мира P_{S} равно 8°. Угол $\angle AP_SB$ равен 6 часам или, в градусной мере, 90°. Нам необходимо найти полярное расстояние P_SS точки юга (S). Очевидно, что $\angle SP_SB = 45°$, откуда

$$P_SS = 8° \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 5.7°.$$

Южный полюс находится на глубине 5.7° под горизонтом для наблюдателя на 5.7° с. ш. При наблюдении на более южных широтах созвездие также можно будет наблюдать полностью.

Обратим внимание на эффекты, которые могут «приподнять» созвездие над горизонтом. Атмосферная рефракция у горизонта составляет $35' \approx 0.6°$, что вполне сравнимо с найденной поправкой к формуле верхней кульминации.

Можно вспомнить, что рост наблюдателя ненулевой, а значит должно наблюдаться понижение горизонта. Его величина для наблюдателя ростом 1.7 м при радиусе Земли 6400 км составляет однако всего $\sqrt{2 \cdot 1.7/6.4 \cdot 10^6} \approx 7.3 \cdot 10^{-6}\,\text{рад} \approx 0.04°$, что более чем на порядок уступает величине рефракции и на ответ практически не влияет.

Таким образом, с учётом рефракции, которая отодвигает искомую границу на север, получаем ответ: $\varphi \in [90°\,\text{ю. ш.}; 6.3°\,\text{с. ш.}]$.

Замечание. Дадим решение для любителей сферической тригонометрии. Обозначим $AP_S = P_SB = p$, $AS = SB = l$, $P_SS = x$. Применим теорему косинусов к сферическому треугольнику AP_SB и воспользуемся тем фактом, что угол AP_SB прямой:

$$\cos 2l = \cos p \cos p,$$
$$\cos 2l = 2\cos^2 l - 1 = \cos^2 p,$$
$$\cos l = \sqrt{\frac{\cos^2 p + 1}{2}}$$

Теперь применим теорему косинусов для сферического треугольника SP_SB, вновь учитывая, что угол при вершине S прямой:

$$\cos p = \cos x \cos l \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{\cos p}{\cos l} = \sqrt{\frac{2\cos^2 p}{\cos^2 p + 1}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1}{\cos^2 p}}} = \sqrt{\frac{2}{2 + \operatorname{tg}^2 p}}.$$

Подставив значение p, получим примерно то же самое значение $x \approx 5.7°$. Очевидно, что последний способ излишне сложен для такой простой задачи.

Критерии проверки

1. Правильный рисунок или описание условий видимости созвездия **2 балла**

   В частности, если указано, что созвездие можно увидеть в какой-то момент целиком из любой точки Южного полушария — **1 балл**.

2. Определение высоты полюса мира **3 балла**
3. Учёт рефракции **1 балл**

   При отсутствии этого пункта определение широты оценивается в полной мере.

4. Определение широты **2 балла**

   Если дано только граничное значение широты и из текста явно не понятно, что более южные широты тоже подходят, то **1 балл**.

   Если граничное значение неверно, то **0 баллов** за этот этап вне зависимости от того, на каком этапе была сделана (кроме неучёта рефракции).

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 6

Предположим, появилась большая потребность разместить геостационарный спутник Земли ровно в зените над Парижем (широта $\varphi = 48°50'$). Расстояние до спутника должно быть таким, чтобы время от отправки сигнала из Парижа до получения ответного сигнала от спутника составляло десятую долю секунды. Под каким углом относительно направления на Париж должно быть направлено сопло двигателя, чтобы спутник действительно замер ровно в зените Парижа? Определите величину ускорения, создаваемого двигателем в единицах g (ускорения свободного падения на поверхности Земли).

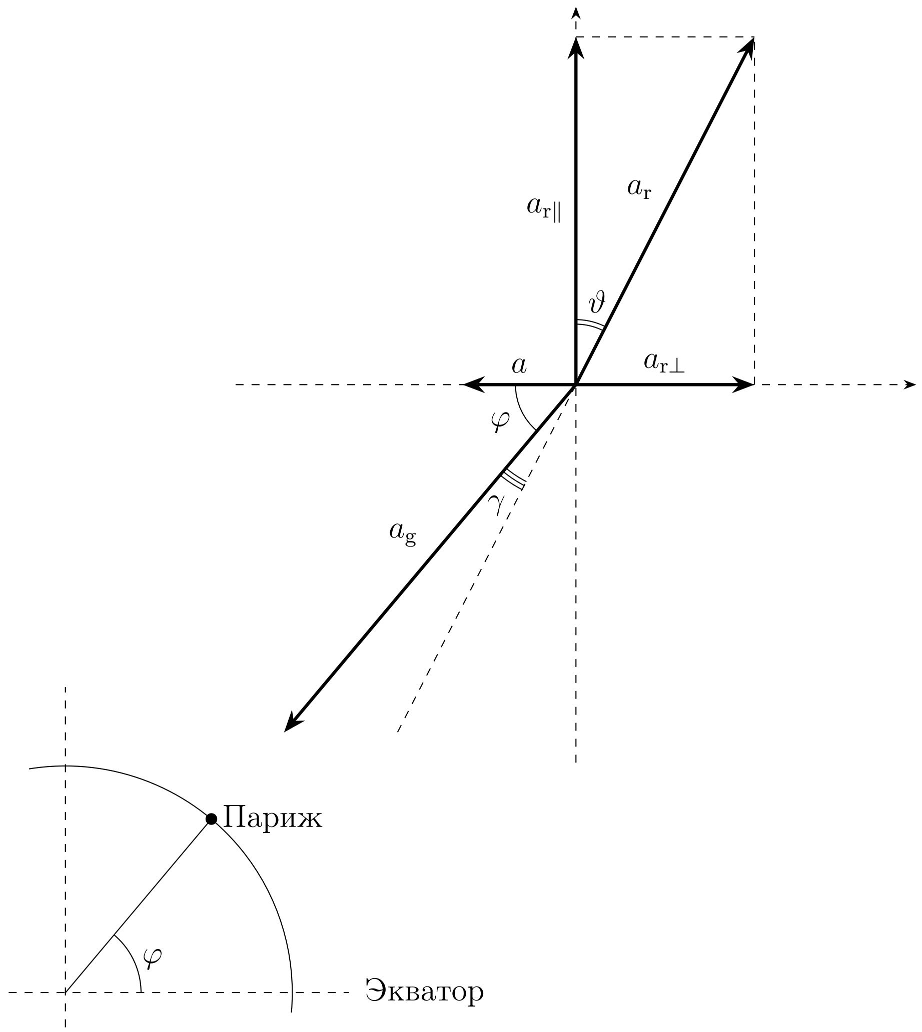
Решение. Время прихода ответного сигнала определяется скоростью света: он должен за десятую секунды пройти два отрезка, равных высоте спутника, откуда

$$h = \frac{1}{2}ct = 15\,000 \text{ км}.$$

Следовательно, расстояние от спутника до центра Земли

$$r = R_\oplus + h = 21\,400 \text{ км}.$$

Заметим, что эта величина примерно в два раза меньше радиуса геостационарной орбиты.



Траекторией спутника будет окружность с радиусом $r\cos\varphi$, центр которой не лежит в плоскости экватора, но лежит на продолжении оси вращения Земли. Мы знаем радиус окружности и период, с которым двигается спутник — звёздные сутки (T). Следовательно, ускорение спутника должно быть направлено к центру окружности (параллельно экватору), а по величине должно быть равно

$$a = \omega^2 r\cos\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} r\cos\varphi.$$

На спутник, кроме двигателей, действует только одна сила — сила притяжения, направленная в сторону центра Земли. Следовательно, a является векторной суммой гравитационного a_g и реактивного a_r ускорений. Двигатели должны полностью уравновесить силу притяжения вдоль оси вращения Земли:

$$a_{\mathrm{r}\|} = a_\mathrm{g}\sin\varphi = \frac{GM}{r^2}\sin\varphi.$$

Ускорение, которое будут создавать двигатели параллельно плоскости экватора (по направлению от оси Земли)

$$a_{\mathrm{r}\perp} = a_\mathrm{g}\cos\varphi - a = \frac{GM}{r^2}\cos\varphi - \frac{4\pi^2}{T^2} r\cos\varphi.$$

Здесь может возникнуть соблазн воспользоваться 3-м законом Кеплера и прийти к выводу, что коэффициенты перед косинусами в правой части уравнения равны. Но надо учесть, что период обращения спутника T соответствует периоду обращения на геостационарной орбите $r_0 \approx 42\,000$ км.

Тангенс угла, под которым (относительно оси вращения Земли) будет направлено суммарное ускорение

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{a_{\mathrm{r}\perp}}{a_{\mathrm{r}\|}} = \frac{\frac{GM}{r^2}\cos\varphi - \frac{4\pi^2}{T^2}r\cos\varphi}{\frac{GM}{r^2}\sin\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\left(1 - \frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{MT^2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}48^\circ 50'}(1-0.13) = 0.76.$$

В итоге получаем $\vartheta = \operatorname{arctg} 0.76 \approx 37.2^\circ$. Двигатели направлены против ускорения. Тогда угол относительно направления на Париж

$$\gamma = 90^\circ - \vartheta - \varphi \approx 4^\circ.$$

Модуль вектора $\vec{a}_\mathrm{r}$ равен

$$a_\mathrm{r} = \sqrt{a_{\mathrm{r}\|}^2 + a_{\mathrm{r}\perp}^2} = \sqrt{\left(\frac{GM}{R_\oplus^2}\cdot\frac{R_\oplus^2}{r^2}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{GM}{R_\oplus^2}\cdot\frac{R_\oplus^2}{r^2}\cos\varphi - \frac{GM}{R_\oplus^2}\cdot\frac{R_\oplus^2 r}{r_0^3}\cos\varphi\right)^2} =$$

$$= g\sqrt{\frac{R_\oplus^4}{r^4}\sin^2\varphi + \frac{R_\oplus^4}{r^4}\cos^2\varphi + \frac{R_\oplus^4 r^2}{r_0^6}\cos^2\varphi - \frac{2R_\oplus^4}{r r_0^3}\cos^2\varphi} = \frac{R_\oplus^2}{r^2} g\sqrt{1 + \left(\frac{r^6}{r_0^6} - \frac{2r^3}{r_0^3}\right)\cos^2\varphi}$$

Здесь $R_\oplus$ — радиус Земли. Мы учли, что $g = GM/R_\oplus^2$. Подставим числа.

$$a_\mathrm{r} \approx \frac{1}{3.36^2}\sqrt{1 + (0.51^6 - 2\cdot 0.51^3)\cos^2 48^\circ 50'}\, g \approx 0.08g.$$

Критерии проверки

1. Определение высоты спутника над Парижем **1 балл**

   Если высота в 2 раза больше (не учтено, что сигнал должен пройти туда и обратно), то оценка за этот пункт и за получение конечных ответов не выставляется, но остальные оцениваются в полной мере.

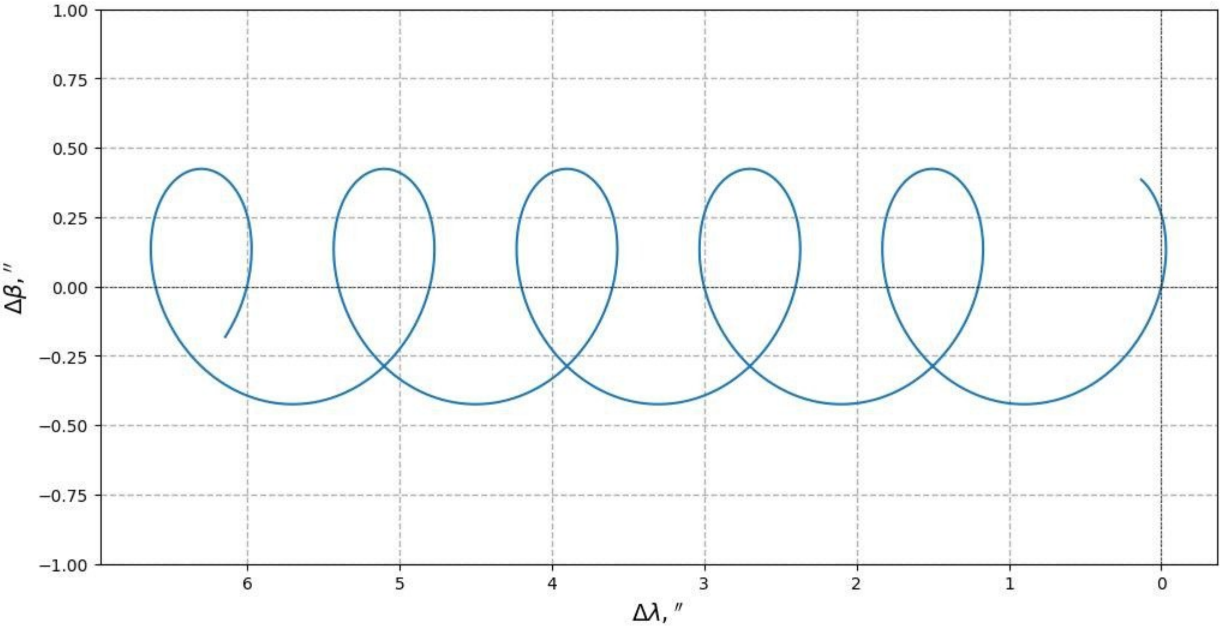
2. Определение орбиты спутника **1 балл**
3. Правильная физическая модель задачи **1 балл**
4. Вывод формулы угла, определяющего направление сопла двигателя относительно Парижа **2 балла**
5. Ответ на первый вопрос **1 балл**
6. Вывод формулы для величины ускорения **1 балл**
7. Ответ на второй вопрос **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. В. Ребриков)

Задача 7

Вам предоставлена схема видимого перемещения звезды в течение нескольких лет при наблюдении с Земли ($\Delta\lambda$ — изменение эклиптической долготы, $\Delta\beta$ — изменение эклиптической широты). Эффекты аберрации света удалены.



Определите следующие величины:

1. расстояние до звезды;
2. собственное движение звезды;
3. эклиптическую широту звезды;
4. период времени, за который произошло перемещение звезды.

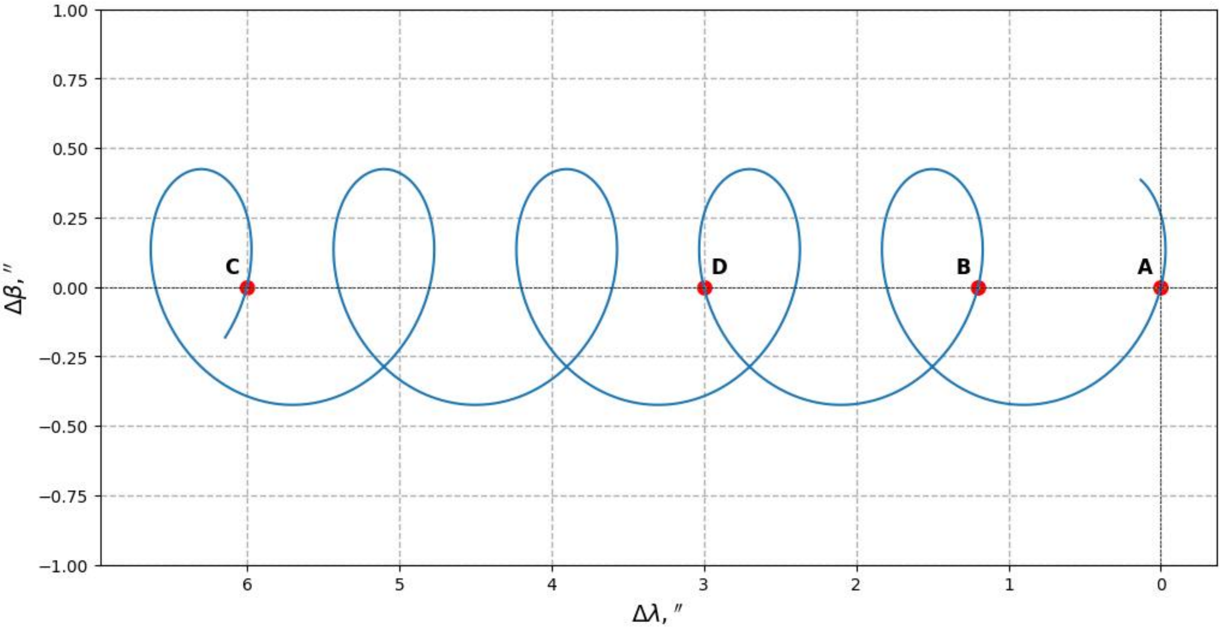
Решение. Обратим внимание, в каких координатах нам предоставлен график. По вертикальной оси отложено изменение эклиптической широты, а по горизонтальной оси — изменение эклиптической долготы. Заметим, что такие построения даются в системе координат, привязанной к конкретной дате, наблюдения очищены от посторонних эффектов, таких как прецессия, нутация, аберрация света, дрожание атмосферы.

Разберёмся в причинах наблюдаемого движения звезды. В условии сказано, что данные «зачищены» от эффекта аберрации света. Какие эффекты тогда остались? Ответ на данный вопрос легко найти в формулировке задачи. Собственное движение звезды на малых временах приводит к постоянному движению звезды на небесной сфере в заданном направлении, а параллактическое смещение должно иметь форму окружности или эллипса, в зависимости от эклиптической широты. Эти два эффекта и описывают наблюдаемое движение.

Параллактический эллипс — это движение звезды в течение года. Малая полуось параллактического эллипса всегда смотрит на полюс мира. Соотношение между малой (b) и большой (a) полуосями эллипса:

$$\frac{b}{a} = \sin|\beta|.$$

Каждая петля наблюдаемого движение — один земной год. Прошло чуть больше 5 петель, следовательно, ответ на **последний вопрос** задачи — 5 лет.



Обратим внимание, что собственное движение звезды происходит в «горизонтальном» направлении без изменения эклиптической широты. Это можно доказать, подстроив касательные к верхним и нижним точкам. Следовательно, на линии $\Delta\beta = 0$ лежит большая полуось параллактического эллипса. Поставим точку **A** на большой полуоси. Через год звезда должна вернуться в ту же самую точку на параллактическом эллипсе, но она оказывается уже в точке **B**.

Расстояние между точками **A** и **B** является величиной собственного движение звезды. Измерим эту величину на графике. Чтобы точность измерений была лучше, сделаем измерение не одного, а нескольких периодов. Рассмотрим точки **A** и **C**.

$$\mu_\lambda = \frac{C - A}{5} = \frac{6}{5} = 1.2''/\text{год}.$$

Чтобы определить параллакс звезды или величину параллактического смещения, добавим на график точку **D**. Прежде всего эта точка удобна тем, что легко определить её абсциссу. Время, за которое произошло перемещение звезды от точки **A** до **D** – 1.5 года. За это время звезда переместилась на расстояние

$$l = 1.5 \cdot \mu + 2\pi_\lambda = 3'',$$

где π_λ — величина годичного параллакса. Тогда

$$1.5 \cdot 1.2 + 2\pi_\lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad 1.8 + 2\pi_\lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad \pi_\lambda = 0.6''.$$

Поскольку в задаче требуется найти расстояние до звезды, то

$$r = \frac{1\ \text{пк}}{\pi''_\lambda} = \frac{1}{0.6} \approx 1.7\ \text{пк}.$$

Осталось ответить на третий вопрос задачи про эклиптическую широту, которая позволит нам дать окончательные ответы на вопросы относительно собственного движения и параллакса. Измерим величину смещения по вертикальной оси. Она равна $b = 0.42''$. Тогда

$$\sin|\beta| = \frac{b}{\pi_\lambda} = \frac{0.42}{0.6} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx \pm 45^\circ$$

Такое решение оценивается полным баллом. Тем не менее у этой задачи есть продолжение решения.

После того как определили величину собственного движения $\mu_\lambda = 1.2''$, стоит задаться вопросом, а что же именно найдено. Смещение на один градус по долготе на разных широтах приводит к реальным смещениям тем меньше, чем дальше от экватора оно происходит. Поскольку длина параллели в $\cos\beta$ раз меньше длины экватора, то и измеренное собственное движение по эклиптической долготе в действительности в $\cos\beta$ раз меньше истинного. Полное собственное движение будет равно:

$$\mu = \sqrt{\mu_\beta^2 + (\mu_\lambda \cos\beta)^2} = \mu_\lambda \cos|\beta|.$$

Здесь мы учли, что собственного движение по координате β равно 0.

Наблюдаемое значение параллактического смещения $0.6''$ также необходимо скорректировать в $\cos\beta$ раз. Значит, истинное значение параллакса

$$\pi = \pi_\lambda \cdot \cos\beta.$$

Теперь воспользуемся формулой соотношения большой и малой полуосей параллактического эллипса и его связью с эклиптической широтой.

$$\frac{b}{\pi} = \sin|\beta| \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\pi_\lambda \cdot \cos\beta} = \sin|\beta| \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\pi_\lambda} = \sin|\beta|\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(2|\beta|)$$

Отсюда получаем синус больше единицы и вывод, что решения нет.

Критерии проверки

1. Утверждение, что наблюдаемое движение следствие двух эффектов **1 балл**
2. Оценка периода времени наблюдений. Принимается 5–6 лет **1 балл**
3. Утверждение, что собственное движение звезды происходит по горизонтали **1 балл**
4. Определение собственного движения звезды 1.2 ± 0.1 **2 балла**

   Верно получены данные на графике — 1 балл, получение верного значения — **1 балл**.
5. Определение параллакса $0.60 \pm 0.05''$ **3 балла**

   Верно получены данные на графике — 1 балл, модель вычисления — **1 балл**, получение верного значения — **1 балл**.
6. Определение расстояния от 1.6 до 1.75 пк **1 балл**
7. Определение эклиптической широты **3**

   Выполнение измерений на графике — **1 балл**, Формулирование метода и получение одного значения — 1 балл, корректная запись пары ответов —1 балл.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 8

Подобно тому как звезды мерцают из-за рассеивания света на неоднородностях земной атмосферы, пульсары мерцают вследствие рассеивания радиоизлучения неоднородностями межзвёздной среды. Одна из простейших моделей мерцаний — рассеивание на тонком экране. Пусть D — расстояние от наблюдателя до пульсара. Расстояние от пульсара до экрана обозначим sD, а от экрана до наблюдателя — $(1-s)D$, $0 < s < 1$.

Вследствие рассеивания к наблюдателю попадают не только лучи, идущие прямо, но и некоторые лучи, рассеявшиеся на экране, образуя в плоскости наблюдателя сложное распределение областей пониженной и повышенной интенсивности излучения (картина мерцаний). Пульсар быстро движется относительно наблюдателя и экрана, в результате чего излучение проходит через разные части экрана, картина мерцаний движется, а телескоп фиксирует изменение интенсивности с частотой f.

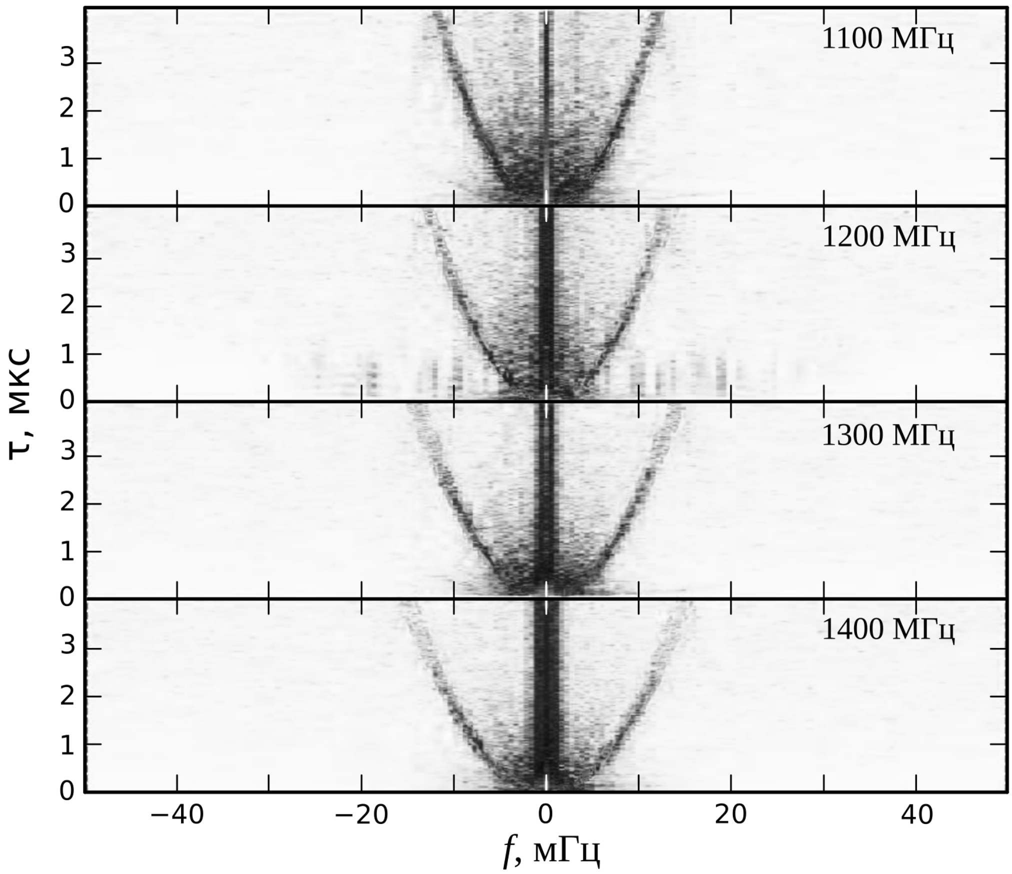


Рисунок из Yao *et al* 2020 *RAA*, v. 20, 5.

На рисунке показаны зависимости задержки сигнала τ, вызванной рассеянием, от частоты f для пульсара B1919+10 на четырёх наблюдательных частотах. Аналитическая формула этой зависимости имеет вид

$$\tau = \eta f^2, \quad \eta = 5.15 \cdot 10^5 \frac{Ds(1-s)}{V_{\text{eff}}^2} \lambda^{\alpha},$$

где D измеряется в килопарсеках, λ — длина волны наблюдения в метрах, V_{eff} — скорость экрана относительно отрезка наблюдатель — пульсар в км/с.

1. С помощью рисунка определите величину α.
2. Найдите зависимость скорости V_{eff} от тангенциальной скорости пульсара V_{p}.
3. Определите угловой и линейный размер рассеянного изображения пульсара.

Считайте, что за пределами графиков полезного сигнала нет. Для исследуемого пульсара $D = 0.36$ кпк, $V_{\text{p}} = 177$ км/с. Движением наблюдателя и экрана пренебречь.

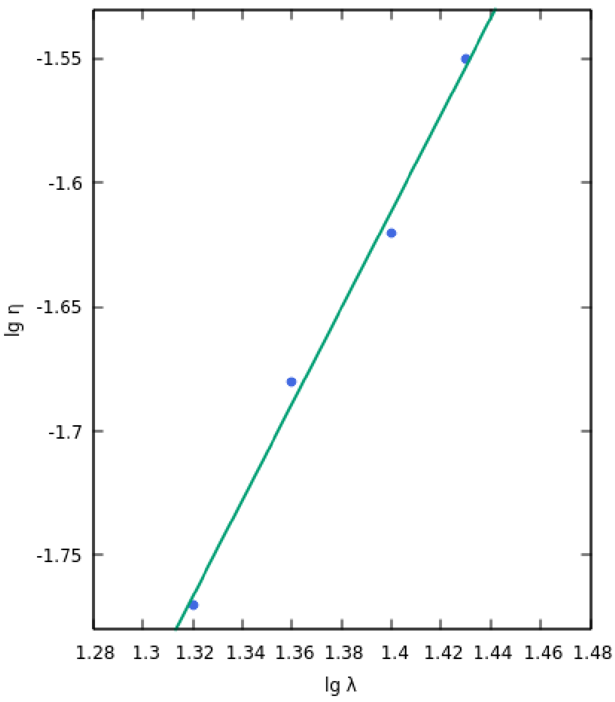
Решение. Для ответа на первый вопрос нам не требуется знать значение множителя при λ^α в формуле для η. Обозначим его как C и прологарифмируем это выражение:

$$\lg \eta = \lg(C\lambda^\alpha) = \alpha \lg \lambda + \lg C.$$

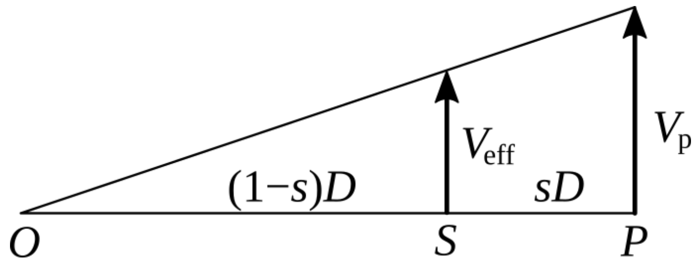
Зависимость между $\lg \eta$ и $\lg \lambda$ получилась линейной, а искомый параметр α в ней — коэффициент наклона. Длина волны связана с частотой наблюдения ν как $\lambda = c/\nu$, где c — скорость света. Частотам 1100 МГц, 1200 МГц, 1300 МГц, 1400 МГц соответствуют длины волн 27 см, 25 см, 23 см, 21 см. Для того чтобы определить η, выберем на каждой параболе на рисунке несколько точек, для каждой определим пары (f_i, τ_i), вычислим значения $\eta_i = \tau_i/d_i^2$ и усредним результаты для каждой частоты. Результаты сведём в таблицу:

λ, см	$\lg \lambda$	η, с^3	$\lg \eta$
21	1.32	0.017	−1.77
23	1.36	0.021	−1.68
25	1.40	0.024	−1.62
27	1.43	0.028	−1.55

Нанесём эти данные на график и проведём прямую по точкам. Получаем, что угол наклона равен около 63°, а искомый коэффициент $\alpha = \text{tg}(63°) \approx 2$.



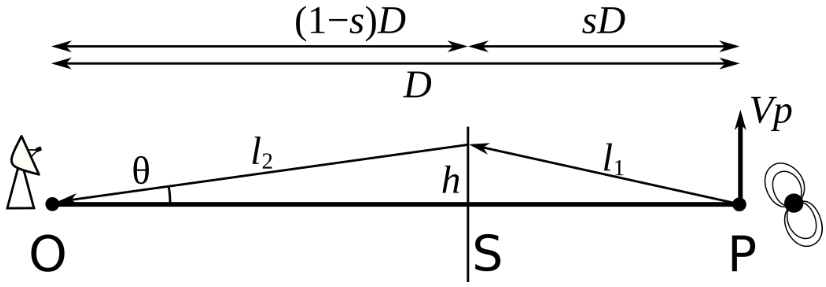
Пусть наблюдатель находится в точке O, экран — в точке S, а пульсар — в точке P. Скорость пульсара V_{p} и эффективная скорость V_{eff} перпендикулярны направлению OP.



Тогда из подобия треугольников получаем пропорцию

$$\frac{V_{\text{p}}}{V_{\text{eff}}} = \frac{D}{(1-s)D} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{eff}} = (1-s)V_{\text{p}}.$$

Задержка сигнала в результате рассеивания возникает в связи с разной длиной пути рассеянного и нерассеянного сигналов. Пусть l_1 — расстояние, которое проходит излучение пульсара до экрана, l_2 — расстояние, пройденное от экрана до наблюдателя, а h — расстояние между рассеянным и нерассеянным лучами в плоскости экрана.



Угол θ, под которым наблюдатель видит рассеянное изображение пульсара, крайне мал, поэтому дальше будем использовать формулы приближенных вычислений: $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ и $(1+\theta)^n \approx 1 + n\theta$.

Сначала определим l_2:

$$l_2 = \frac{(1-s)D}{\cos\theta} \approx \frac{(1-s)D}{1-\frac{\theta^2}{2}} \approx (1-s)D\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right).$$

Расстояние h можно выразить как

$$h = (1-s)D\operatorname{tg}\theta \approx (1-s)D\theta.$$

Тогда l_1 можно получить из теоремы Пифагора:

$$l_1 = \sqrt{h^2 + s^2D^2} = sD\left(1 + \frac{h^2}{s^2D^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx sD\left(1 + \frac{(1-s)^2D^2\theta^2}{2s^2D^2}\right) = sD\left(1 + \frac{(1-s)^2}{s^2}\frac{\theta^2}{2}\right).$$

Расстояние, пройденное импульсом пульсара, равно

$$l_1 + l_2 = (1-s)D + (1-s)D\frac{\theta^2}{2} + sD + \frac{(1-s)^2}{s}\frac{\theta^2}{2}D = D + \frac{1-s}{s}\frac{\theta^2}{2}D.$$

Здесь D — расстояние, пройденное нерассеянным импульсом, поэтому задержка составляет

$$\tau = \frac{l_1 + l_2 - D}{c} = \frac{(1-s)}{s}\frac{\theta^2}{2c}D.$$

Значение s можно определить с помощью измеренных значений η. Перепишем формулу из условия в более удобном виде, приняв во внимание полученное соотношение между V_p и V_eff:

$$\eta = 5.15 \cdot 10^5 \frac{Ds(1-s)}{(1-s)^2 V_\text{p}^2}\lambda^2 = 5.15 \cdot 10^5 \frac{Ds(1-s)}{(1-s)^2 V_\text{p}^2}\lambda^2 = 5.15 \cdot 10^5 \frac{D\lambda^2}{V_\text{p}^2}\frac{s}{1-s}$$

$$\frac{1}{s} - 1 = 5.15 \cdot 10^5 \frac{D\lambda^2}{\eta V_\text{p}^2}$$

$$s = \left(\frac{5.15 \cdot 10^5 D\lambda^2}{\eta V_p^2} + 1\right)^{-1}.$$

Вычислим s для каждой длины волны, а результаты занесём в таблицу:

λ, м	η, с^3	s
0.21	0.017	0.059
0.23	0.021	0.062
0.25	0.024	0.061
0.27	0.028	0.060

Усреднив значение s, получим $s \approx 0.06$. Максимальные задержки на графике равны 4.2 мкс. Тогда угловой размер изображения пульсара равен

$$2\theta = 2\sqrt{\frac{s}{1-s}\frac{2c\tau}{D}} = 2\sqrt{\frac{0.06}{(1-0.06)}\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 4.2 \cdot 10^{-6}}{0.36 \cdot 3.1 \cdot 10^{16}}} \approx 7.6 \cdot 10^{-9}\text{ рад} \approx 1.6 \cdot 10^{-3\prime\prime}.$$

Этому углу соответствует линейный размер в области экрана

$$2h = (1-s)D \cdot 2\theta = (1-0.06) \cdot 360\text{ пк} \cdot 7.6 \cdot 10^{-9}\text{ рад} \approx 2.6 \cdot 10^{-6}\text{ пк} \approx 0.5\text{ а. е.}$$

Критерии проверки

1. Определение α **4 балла**

   Получено значение в пределах 1.8–2.2 — полный балл, 1.5–2.5 — не более 3 баллов.

   Если значения η получены по одному измерению на график, оценка снижается на **1 балл.**
2. Определение зависимости $V_\text{eff}(V_\text{p})$ **1 балл**
3. Формула для задержки сигнала **2 балла**
4. Определение s **2 балла**

   Если значение получено по одному измерению, то **1 балл**.
5. Определение θ **1 балл**
6. Определение линейного размера **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Справочные данные

Данные о Солнце, Земле, Луне и Галактике

Светимость Солнца	$L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26}$ Вт
Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot} = -26.78^{\mathrm{m}}$
Абсолютная болометрическая звёздная величина Солнца	$M_{\odot} = 4.72^{\mathrm{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot} = 5800$ К
Солнечная постоянная	$E_{\odot} = 1360.8$ Вт м$^{-2}$
Поток солнечной энергии в видимых лучах на расстоянии Земли	$= 600$ Вт м$^{-2}$
Тропический год	$= 365.24219$ сут
Звёздные сутки	$=$ 23 ч 56 мин 04 с
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23°26'21.45''$
Синодический месяц	$S_{☾} = 29.530\,59$ сут
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_{☾} = -12.7^{\mathrm{m}}$
Число звёзд в нашей Галактике	$= 10 \cdot 10^{11}$
Радиус диска нашей Галактики	$=$ 20 кпк
Масса нашей Галактики (в массах Солнца)	$= 2 \cdot 10^{12}$

Астрономические и физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ м^3 кг$^{-1}$ с$^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8$ м с$^{-1}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ кг с$^{-3}$ К$^{-4}$
Постоянная Планка	$\mathrm{h} = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж с
Масса протона	$m_{\mathrm{p}} = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Астрономическая единица	1 а. е. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
Парсек	1 пк $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м
Время накопления сигнала глазом	$= 0.05$ с

Формулы приближённого вычисления (при $x \ll 1$)

$$\sin(x) \approx x \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{tg} x \approx x$$

$$\ln(1+x) \approx x \qquad e^x \approx 1 + x \qquad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

Характеристики Солнца, планет и некоторых спутников

Объект	Большая полуось, а.е.	Эксцен-триситет	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, тыс. км	Осевой период
Солнце				1.989×10^{30}	696	25.38 сут
Меркурий	0.3871	0.2056	87.97 сут	3.302×10^{23}	2.44	58.65 сут
Венера	0.7233	0.0068	224.70 сут	4.869×10^{24}	6.05	243.02 сут
Земля	1	0.0167	365.26 сут	5.974×10^{24}	6.37	23.93 ч
Луна	0.002 57	0.0549	27.322 сут	7.348×10^{22}	1.74	27.32 сут
Марс	1.5237	0.0934	686.98 сут	6.419×10^{23}	3.40	24.62 ч
Юпитер	5.2028	0.0483	11.862 лет	1.899×10^{27}	69.9	9.92 ч
Сатурн	9.5388	0.0560	29.458 лет	5.685×10^{26}	60.3	10.66 ч
Уран	19.1914	0.0461	84.01 лет	8.683×10^{25}	25.6	17.24 ч
Нептун	30.0611	0.0097	164.79 лет	1.024×10^{26}	24.7	16.11 ч